SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE COTE D'IVOIRE

Concours Miss Mathématique 2022
NIVEAU : Terminale C & E
Durée : 4 h
Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2.
Les cinq exercices sont indépendants.

Exercice 1 *RÉCONCILIATION*

On donne pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.
2. Quel est le chiffre des unités de $\left(\dfrac{S_{2022}}{51}\right)^{2022}$.

Exercice 2 *PAIX*

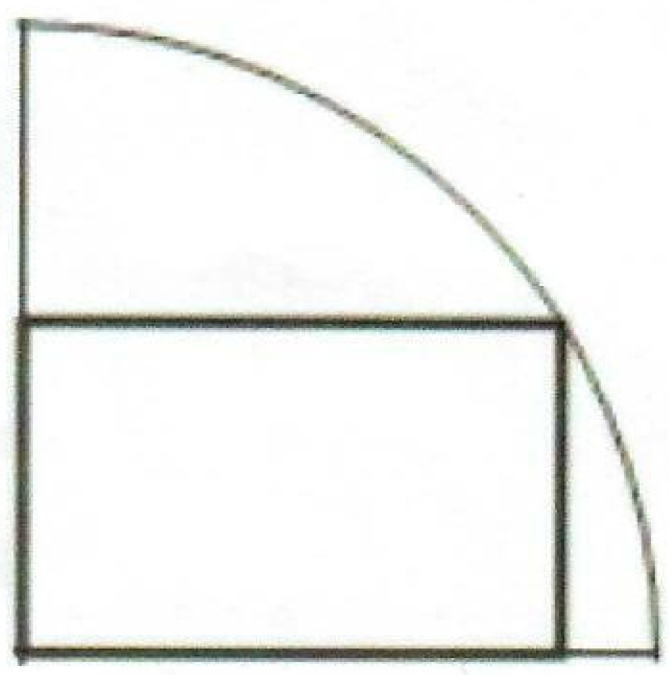
Soit ABC un triangle à angles aigus tel que $\text{mes}(\widehat{BAC}) = 30°$. On désigne : par H l'orthocentre du triangle ABC, par I le milieu du segment $[BC]$, par D le symétrique de H par rapport à I et par O le milieu du segment $[AD]$.

1. Montrer que le triangle OBC est équilateral.
2. En déduire que $AD = 2BC$.

Exercice 3 *FRATERNITÉ*

La figure ci-contre représente un rectangle inscrit dans un quart de cercle de rayon 1. On note P le périmètre du rectangle.

1. On note x la longueur d'un des côtés du rectangle. Montrer que
$$8x^2 - 4Px + P^2 - 4 = 0.$$
2. Déterminer les dimensions du rectangle lorsque P prend sa plus grande valeur possible.



Exercice 4 — *SOLIDARITÉ*

Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$. On considère la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \int_0^{\tan(x)} \frac{1}{1+t^2}dt$, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
2. Calculer pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ la dérivée $f'(x)$.
3. En déduire l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, puis calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$.

Exercice 5 — *DÉVELOPPEMENT*

On dit qu'un nombre entier n est un nombre d'Eisenstein s'il existe des entiers relatifs a et b tels que $n = a^2 + ab + b^2$.

Le but de l'exercice est de déterminer certaines propriétés remarquables de ces nombres.

1. Montrer que tous les nombres d'Eisenstein sont positifs.
2. Montrer que si m est un entier, alors m^2 et $3m^2$ sont des nombres d'Eisenstein.
3. Le nombre 2 est-il un nombre d'Eisenstein ?
4. Montrer que le produit deux nombres d'Eisenstein est un nombre d'Eisenstein.
5. La somme deux nombres d'Eisenstein est-il un nombre d'Eisenstein ?
6. Soit n un entier.
   (a) Montrer que l'entier $3n - 1$ n'est pas un nombre d'Eisenstein.
   (b) Montrer que si n est un nombre d'Eisenstein, alors $4n$ est aussi un nombre d'Eisenstein.
   (c) Montrer que si n est un multiple de 9, alors n est un nombre d'Eisenstein si et seulement si $\frac{n}{3}$ l'est.

PARTENAIRE OFFICIEL

PORT AUTONOME D'ABIDJAN

Une Référence Internationale

PARTENAIRES

RTI NSIA SODECI SIR CI-ENERGIES CÔTE D'IVOIRE ÉNERGIES