CONCOURS MISS MATHEMATIQUE
Édition 2018
Niveau : Terminale C et E
Durée : 4 heures

SOCIETE MATHEMATIQUE DE COTE D'IVOIRE - SMCI

1. RÉCONCILIATION

Combien l'équation : $\tan x + \tan(2x) + \tan(3x) + \tan(4x) = 0$
possède-t-elle de solutions dans l'intervalle $[0, \pi]$?

2. PAIX

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie pour tout entier n par : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1+x)^n}dx$.

1) Calculer les trois premier termes de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) Calculer l'intégrale I_n pour tout entier naturel $n \geq 3$.
3) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. FRATERNITÉ

Soit m un nombre complexe différent de 1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z :

(E) $$z^2 - (1-i)(m+1)z - i(m^2+1) = 0$$

1) Montrer que le discriminant $\triangle$ de (E) s'écrit sous la forme $\triangle = \left[(1+i)(m-1)\right]^2$.
2) Résoudre l'équation (E).
3) Déterminer, sous forme algébrique, m tel que le produit des solutions de (E) soit égal à 1.
4) On suppose maintenant que $m = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Écrire sous la forme trigonométrique les solutions de l'équation (E).

4. SOLIDARITÉ

On se propose de déterminer tous les entiers n pour lesquels $\sqrt{n+12\sqrt{5}} - \sqrt{n-12\sqrt{5}}$ est un entier. Si tel est le cas on pose $k = \sqrt{n+12\sqrt{5}} - \sqrt{n-12\sqrt{5}}$.

1) Montrer que $4k^2 n = k^4 + 5\times 24^2$.
2) En déduire qu'il existe un entier m tel que $km = 24$.
3) Montrer alors que k est un entier pair.
4) En déduire les valeurs de n pour lesquelles $\sqrt{n+12\sqrt{5}} - \sqrt{n-12\sqrt{5}}$ est un entier.

5. DÉVELOPPEMENT

O est un point à l'intérieur d'un triangle ABC tel que $mes\widehat{BAC} = 60°$ et $mes\widehat{AOB} = mes\widehat{BOC} = 120°$.
Le point D appartient à la demi-droite $[CO)$ tel que AOD soit un triangle équilatéral.
La médiatrice de $[AO]$ rencontre la droite (BC) en Q.
On se propose de montrer que la droite (OQ) passe par le milieu du segment $[BD]$.

1) Faire une figure qu'on completera au fur et à mesure.
2) Montrer que les triangles OAB et OCA sont semblables.
3) Le point E est tel que $OEAD$ est un losange. Soient F et G les symétriques respectifs des points D et E par rapport à O.
   (a) Montrer que les droites (BD) et (EC) sont parallèles.
   (b) Montrer que $GBFC$ est un trapèze.
4) Soit I l'intersection des droites (BC) et (GF), et I' le symétrique de I par rapport à O.
   (a) Montrer que $I' \in (DE)$ et que les points Q, D et I' sont alignés.
   (b) En déduire que la droite (OQ) passe par le milieu du segment $[BD]$.