SOCIETE MATHEMATIQUE DE COTE D'IVOIRE (SMCI)

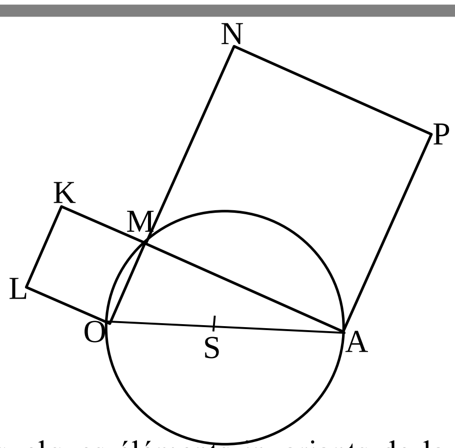
Concours Miss Mathématique 2017

NIVEAU : Terminale C

Durée : 4 heures

Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Les cinq exercices sont indépendants.

1 RECONCILIATION (*4 pts*)



Le plan est orienté.
Sur la figure ci-contre :

- les points O et A sont fixes et distincts ;
- (C) est le cercle de diamètre [OA] ;
- S est le milieu du segment [OA] ;
- M est un point variable appartenant au cercle (C) et distinct des points O et A ;
- MAPN et MKLO sont des carrés de sens directs.

Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et de déterminer le lieu géométrique du point N lorsque M décrit le cercle (C) privé des points O et A.

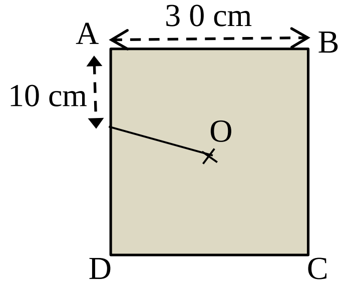
1- a) Démontrer que quel que soit la position du point M sur le cercle (C), sauf en O et en A, le milieu Ω du segment [PL] est fixe.
b) Démontrer que la distance KN est constante.

2- Démontrer que le triangle $KN\Omega$ est rectangle et isocèle en Ω.

3- Déterminer le lieu géométrique du point N lorsque M décrit (C) privé des points O et A.

2 PAIX (*3 pts*)

Mariame doit découper une Tarte carrée (représentée par le carré ABCD) de 30 cm de côté en cinq parts de même aire.
Elle plante son couteau au centre O de la tarte et fait une première découpe suivant une ligne droite jusqu'à un point situé sur le segment [AD], à 10 cm du point A. Elle s'apprête à réaliser d'autres coupes partant du centre.
La figure ci-contre n'est pas en grandeur réelle.
1- Expliquer comment elle doit continuer à découper la tarte.
2- Faire une figure.



3 FRATERNITE (*4pts*)

Dans cet exercice, on se propose d'étudier des couples (a, b) d'entiers strictement positifs tels que : $a^2 = b^3$.
Soit (a, b) un tel couple et d = PGCD(a, b). On note u et v les entiers tels que : a = du et b = dv

1. a) Démontrer que u et v sont premiers entre eux.
   b) Démontrer que : $u^2 = dv^3$.
   c) En déduire que v divise u
   d) Déduire des questions précédentes que v = 1.

2. Soit (a, b) un couple d'entiers strictement positifs.
Démontrer que :
$a^2 = b^3$ si et seulement si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

3. Démontrer que si n est le carré d'un nombre entier naturel et le cube d'un autre entier, alors $n \equiv 0\ [7]$ ou $n \equiv 1[7]$

4 SOLIDARITE (*4pts*)

1- Soit x un nombre réel positif ou nul et k un entier strictement supérieur à x.
a) Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier n supérieur ou égal à k,

$$\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$$

b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à k, $\frac{x^n}{n\,!} \leq \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}$

c) Démontrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n\,!} = 0$.

2- a) Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\frac{n^{n-1}}{n\,!} \geq 1$

b) En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^n}{n\,!} = +\infty$.

5 DEVELOPPEMENT (4 *pts*)

On se propose de déterminer une fonction f définie sur $\mathbb{Q}$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :
Condition 1 : $\forall\, x \in \mathbb{Q}, \forall\, y \in \mathbb{Q}, f(x+y) + x + y = [f(x) + x][f(y) + y]$.
Condition 2 : $f(1) = a - 1$ (a étant un nombre rationnel strictement positif).

1) Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{Q}, f(x) + x \geq 0$ (on pourra remarquer que : $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$).
2) Démontrer que $f(x) + x$ n'est nul pour aucune valeur de x (on pourra utiliser un raisonnement par l'absurde).
3) Déduire des questions précédentes que : $\forall\, x \in \mathbb{Q}, f(x) + x > 0$ *et que* $f(0) = 1$.

4) a) Démontrer par récurrence que : $\forall\ x \in \mathbb{Q}, \forall\ n \in \mathbb{N}, f(nx) + nx = \ [f(x) +\ x]^n$.
   b) Démontrer que : $\forall\ x \in \mathbb{Q},\ f(-x) - x = \ [f(x) +\ x]^{-1}$.
   c) En utilisant les questions 4-a) et 4-b), justifier que :
   $\forall\ x \in \mathbb{Q}, \forall\ p \in \mathbb{Z}, f(px) + px = \ [f(x) +\ x]^p$
5) a) Démontrer que : $\forall\ n \in Z^*, f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \ = \ a^{\frac{1}{n}}$
   b) En déduire que : $\forall\ x \in \mathbb{Q}, f(x) = a^x - x$