SOCIETE MATHEMATIQUE DE COTE D'IVOIRE - SMCI

SOCIETE MATHEMATIQUE
DE COTE D'IVOIRE (SMCI)

Concours Miss Mathématique 2015

NIVEAU : Terminale C

Durée : 4 heures

Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2.Les cinq exercices sont indépendants.

1 RECONCILIATION

On considère les fonctions dérivables suivantes :

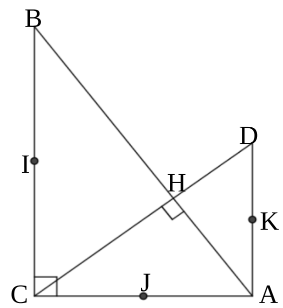
- f définie de [0 ; 1] dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2}dt$;
- F définie de $[0\ ;\frac{\pi}{2}]$ dans $\mathbb{R}$ par : $F(x) = f(\sin x)$.

Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale: $\int_0^1 \sqrt{1-\ t^2}\ dt$.

1) Calculer $F'(x)$ pour tout nombre réel x de $[0\ ;\frac{\pi}{2}]$.
2) Démontrer que, pour tout nombre réel x de $[0\ ;\frac{\pi}{2}]$, $F(x) = \int_0^x \cos^2 t dt$.
3) Sans calculer les intégrales, démontrer l'égalité : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt$. En déduire la valeur commune des deux intégrales.
4) Déduire des questions précédentes que : $\int_0^1 \sqrt{1-\ t^2}\ dt = \frac{\pi}{4}$.

2 PAIX

Dans un plan orienté, on considère un triangle CAB rectangle en C et de sens direct ; la hauteur issue de C coupe (BA) en H et coupe la parallèle à (BC) menée par A en D (voir figure ci-contre).



On pose CA = b et BC = a.

1) On considère la similitude directe S transformant C en A et B en C.
   a) Déterminer l'angle de S puis exprimer son rapport en fonction de a et b.
   b) Déterminer les images respectives des droites (CH) et (AB) par S. En déduire que H est le centre de S.
   c) Déterminer l'image de A par S.
2) En utilisant la similitude S, démontrer l'égalité : $HC^2 = HA\times HB$.
3) Soit I le milieu de [BC], J le milieu de [CA] et K le milieu de [AD]. Démontrer que le triangle IJK est rectangle en J et que, dans ce triangle, H est le pied de la hauteur issue de J.

Conseil du Café-Cacao
Le Conseil de Régulation, de Stabilisation et de Développement de la Filière Café-Cacao

3 FRATERNITE

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulle et telle que :

(P) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall x' \in \mathbb{R}, f(x+x') + f(x-x') = 2f(x)f(x')$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1) Démontrer que :
   a) $f(0) = 1$.
   b) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$.
2) On suppose dans toute la suite qu'il existe un nombre réel a tel que $f(a) = 0$.
   a) Justifier que : $a \neq 0$.
   b) Démontrer que : $f(2a) = -1$.
   c) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(a+x) = -f(a-x)$.
3) Interpréter graphiquement le résultat de chacune des questions 1.b) et 2.c).
4) On se propose de déterminer une période de f.
   a) Démontrer que f est périodique de période $4a$.
   b) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{Z},\ f(4ka) = 1$ et $f[(4k+2)a] = -1$.
   c) Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{Z}, f[(2k+1)a] = 0$.
   d) Trouver un exemple de fonction f continue sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulle et vérifiant la propriété (P).
   Construire la courbe représentative (C)de $f$sur l'intervalle $[-4a\ ;\ 4a]$ où $a = \frac{\pi}{2}$.

4 SOLIDARITE

Soit $S_n = 1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{111\ldots1}$.Le dernier terme est formé de n chiffres 1.

Démontrer que $S_n = \dfrac{10^{n+1} - 9(n+1) - 1}{81}$.

Indication : *On pourra calculer* $9S_n$.

5 DEVELOPPEMENT

1) On considère les suites u et v, définies pour tout entier naturel non nul$n$, paru_1 et les égalités :$u_{n+1} = \frac{6}{7} + \frac{6}{7}u_n$ et $v_n = u_n - 6$.Justifier que v est une suite géométrique.

2) On admet quepour tout entier naturel$n$strictement supérieur à 1 : $|n-6| < 6^{n-1}$.
Déterminer tous les entiers naturels$n$strictement supérieurs à 1 pour lesquels 6^{n-1} divise $|n-6|$.

3) Dans une compétition sportive qui a duré n jours ($n > 1$), m médailles ont été distribuées.

Le premier jour, on a distribué 1 médaille plus un $\frac{1}{7}$ des m–1 médailles restantes.

Le deuxième jour, on a distribué 2 médailles plus $\frac{1}{7}$ du nouveau reste et ainsi de suite de telle manière que le nième jour on a distribué exactement les n médailles qui restaient.

Déterminer m et n.

Conseil du Café-Cacao
Le Conseil de Régulation, de Stabilisation et de Développement de la Filière Café-Cacao